حساب گزاره ها

گزاره جمله ای است که میتواند راست یا دروغ باشد

۱. ۵ زوج است F

۲. 7 اول است T

۳. $X^2 = 2$ جواب دارد T

جمله زیر گزاره نمیباشد

$X^2 = 3$

ترکیب گزاره ها

۱) ترکیب فصلی

اگر P و Q دو گزاره باشد، ترکیب P و Q را با $P \cup Q$ نشان میدهند و جدول ارزش آن عبارت است از:

P	Q	$P \cup Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثلا: ۵ زوج است؟

۱۱ اول است؟

جواب درست است.

۲) ترکیب عطفی

اگر P و Q دو گزاره باشد، ترکیب Q و P را با $P \cap Q$ نشان میدهند و جدول ارزش آن بصورت زیر است.

P	Q	$P \cap Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثلا: ۱۳ فرد و ۱۵ اول است

نادرست است.

نقیض یا نقض

اگر P یک گزاره باشد. نقض یا نقیض P را که با P~ نشان میدهند ، دارای ارزش زیر است.

P	$\sim P$
T	F
F	T

مثلا: ۱۷ اول است P:

۱۷ اول نیست P~

جدول ارزش گزاره ها

مطلوب است ارزش گزاره

$$(p \cap q)\ v\ (\sim p \cup q)$$

P	Q	$p \cap q$	$\sim p$	$\sim p \cup q$	$(p \cap q) v (\sim p \cup q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T

مثال) جدول ارزش گزاره ها $L = \big((P \cap Q)vR\big) \cap \big(\sim(P \cap R)\big)$ را تعیین کنید.

P	Q	R	P ∩ Q	(P ∩ Q)vR	P ∩ R	~(P ∩ R)	گزاره کل
T	T	T	T	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	T	T	F	F
T	F	F	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	T	F

گزاره راستگو

گزاره ای که به ازای هر ارزش دهی برای گزاره های پایه درست باشد

مثال) نشان دهید که $P \cup \sim P$ راستگو است.

P	$\sim P$	$P \cup \sim P$
T	F	T
F	T	T

راستگو است

مثال) نشان دهید که $L = (P \cap Q)v\ (\sim P\ v \sim Q)$ راستگو است.

P	Q	$P \cap Q$	$\sim P$	$\sim Q$	$(\sim P\ v \sim Q)$	L
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T	T

گزاره های هم عرض (متعادل)

دو گزاره را هم عرض یا متعادل نامند که به ازای هر ارزش دهی گزاره های پایه دارای ارزش یکسان باشند.

گزاره شرطی

اگر P و Q دو گزاره باشند ترکیب شرطی P و Q که با علامت $P => Q$ نشان داده میشود

، دارای جدول ارزش زیر است.

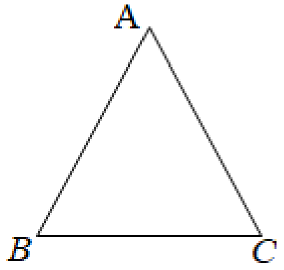
P	Q	$P => Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

نشانه

اگر P آنگاه Q

$P =$ مقدم $\qquad Q =$ تالی

مثال) اگر $\overset{\Delta}{ABC}$ مثلث و $AB = AC$ آنگاه $\overset{\frown}{B} = \overset{\frown}{C}$



مقدم $\begin{cases} 1) \ \overset{\Delta}{ABC} \\ AB = AC \end{cases}$ تالی $\overset{\frown}{B} = \overset{\frown}{C}$

قضیه

عبارات زیر گزاره $P => Q$ هم ارزند

1. $\sim P \ v \ Q$
2. $\sim Q \overset{\text{آنگاه}}{\Rightarrow} \sim P$ عکس نقیض
3. $\sim (P \cap \sim Q)$

اثبات ۲)

P	Q	$P => Q$	$\sim Q$	$\sim P$	$\sim Q => \sim P$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

اثبات ۳)

P	Q	$\sim Q$	$P => Q$	$P \cap \sim Q$	$\sim(P \cap \sim Q)$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	F
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	F	T

گزاره های شرطی

اگر P و Q دو گزاره باشند، ترکیب $P <=> Q$ گزاره دوشرطی نامیده میشود و جدول آن بصورت زیر تعریف میشود.

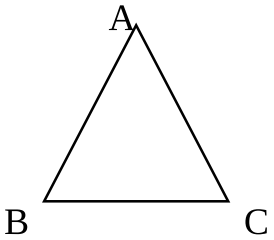
P	Q	$P \leq> Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

نشانه

P اگر و فقط اگر Q ‎<--‎ دوشرطی

مثال) در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$، $AB = AC$ اگر و فقط اگر $\overset{\cap}{B} = \overset{\cap}{C}$ باشد.

قضیه



۱) $P <=> Q \equiv (P => Q) \cap (Q => P)$

P	Q	$P <=> Q$	$Q => P$	$P => Q$	$(P => Q) \cap (Q => P)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T

گزاره نماها

مثال)

1) $x + 4 = 3$

اگر $x = -1$ درست است

اگر $x = 2$ نادرست است

2) $x + y = 4$

بارم بستگی $x = y$ دارد

$2 + 2 = 4$ √
$2 + 3 = 4$ ×

3) $x + 2y + 4z \leq 10$

بارم بستگی دارد

گزاره نما عبارتی است مشتمل بر یک یا چند متغیر که با تبدیل متغیرها به مقادیر مشخص تبدیل به گزاره میشود.

4) x درس جبر را دارد

- خبری میدهد پس گزاره نماست

- درس جبر، را دارد

✓ گزاره نماها را با حروف نشان میدهند

نمایش گزاره نماها

1) $x + 4 = 3 \quad : P(x)$

2) $x + y = 4 \quad : Q(x.y)$

3) $x + 2y \to 4z \leq 10 \quad : R(x.y.z)$

سورها

الف) سور عمومی $(\forall)- < (all)- <$ به ازای هرx یعنی به ازای هر x $P(x)$

$\forall x P(x)$

۱) به ازای هر x $(x + 4 = 3)$

"نادرست است"

"هر عدد حقیقی را با ۴ جمع کنید ۳ میشود پس نادرست است"

به ازای هر x و به ازای هر y

$(x + y = 4)$　　$\forall x\, \forall y\, (x + y = 4)$

ب) سور وجودی $(\exists)$ یعنی وجود، دارد x

"عددی است که حاصل جمع $\exists x P(x)$ آن با چهار داده میشود."

✓ گزاره است

✓ درست است

2) $x + y = 4$　　　　$\exists x\ \exists y\ \ Q(x + y)$

ممکن است ترکیب شود . مثلا:

$\forall x\ \exists y\ \ Q(x + y)$

به ازای هر x یک y است

به ازای هر عدد حقیقی x عددی حقیقی مانند y هست بطوری که $x+y=4$ "درست است"

❖ یعنی مقدار y به x بستگی دارد.

مثال) $\exists x\ \forall y\ Q\ (x + y)$

"نادرست است"

وجود دارد x ای به ازای هر y ($x+y=4$) است

نقیض سور

نقیض عمومی = وجودی　$\sim\forall = \exists$

نقیض وجودی = عمومی　$\sim\exists = \forall$

مثال)

$\forall x\ P(x)$

$\forall x(x + 4 = 3)$

مطلوب است　$\sim(\forall x\ P(x))$

$$\sim(\forall x\, P(x)) = \exists x\,(\sim P(x))$$

یعنی عددی مانند x هست بطوری که $x + 4 \neq 3$

مطلوب است نقیض

$$\forall x\, \exists y\, Q(x + y)$$

$$\sim(\forall x\, \exists y\, Q(x + y)) = \exists x\, \forall y\, (\sim Q(x + y))$$

عددی مانند x هست به قسمی که به ازای هر عدد مانند y $x+y=4$ * نادرست است

مثال) نشان دهید که $\sim P \cup \sim Q \equiv \sim(P \cap Q)$

$$\sim P \cap \sim Q \equiv \sim(P \cup Q)$$

$$(P \cup Q) \cup Q \equiv P \cup (Q \cup R)$$

$$(P \cap Q) \cap R \equiv P \cap (Q \cap R)$$

شکست پذیر

$$P \cup (Q \cap R) \equiv (P \cup Q) \cap (P \cup R)$$

$$P \cap (Q \cup R) \equiv (P \cap Q) \cup (P \cup R)$$

بخش پذیر

استقراء ریاضی

فرض کنید که $P(x)$ یک گزاره نما باشد، چنانچه:

۱) $P(1)$ درست باشد

۲) از درستی $P(n)$ بتوان درستی $P(n+1)$ را نتیجه گرفت ، در این صورت به ازای هر n $P(n)$ درست است.

$\forall n P(n)$

درست است

مثال) نشان دهید که حاصل جمع اولین n عدد فرد برابر n^2 میباشد

$P(n): 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$
$P(1): 1 = 1^2$
$P(2): 1 + 3 = 2^2$
$P(3): 1 + 3 + 5 = 3^2$
$P(4): 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

فرض کنید $P(n)$ درست است، یعنی $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$

بنابراین $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

فرض کنید که n_0 یک عدد طبیعی و $P(n)$ یک گزاره نما است، چنانچه:

۱) $P(n_0)$ درست باشد

۲) از درستی $P(n)$ $(n \geq n_0)$ بتوان درستی $P(n+1)$ را نتیجه گرفت آنگاه به ازای هر

$n \geq n_0$ $P(n)$ درست است.

مثال) نشان دهید که $n \geq 2$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} : P(n)$$
$n_0 = 2$

$$P(2): \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} > 2 \rightarrow 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} > \sqrt{2}$$

$$1 > \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 2 > \sqrt{2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

بنابراین

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{\sqrt{n^2+n}+1}{\sqrt{n+1}}\rightarrow\frac{n+1}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}$$

استقراء ریاضی قوی

فرض کنید که $P(n)$ یک گزاره نما است

۱) $P(1),P(2),P(3),\ldots,P(k)$ درست است

۲) از درستی $P(1),P(2),\ldots,P(n)$ بتوان درستی $P(n+1)$ را نتیجه گرفت در این صورت به ازای هر $P(n)$ درست است.

مثال) $\{a_n\}$ یک دنباله است $a_0=5\,.\,a_1=1\,.\,a_n=a_n+a_n-1$ نشان دهید که

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$
$$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n=\propto$$
$$(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n=\beta$$

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{5}}(1-1)=0$$
$$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1$$
$$a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)=1$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+5+2\sqrt{2}}{4}-\frac{1+5-2\sqrt{5}}{4}\right)$$

با استقراء قوی

$$n_{n+1} = a_n + a_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\propto^n - \beta^n) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\propto^{n-1} - \beta^{n-1})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\propto^n + \propto^{n-1}) - (\beta^n + \beta^{n-1})\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\propto^{n-1}(\propto -1) - \beta^{n-1}(\beta + 1)\right) = \propto +1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1$$
$$= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \beta + 1$$
$$= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \beta^2$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\propto^{n+1} = \beta^{n+1})$$

مثال) ((۵۶) صفحه۵۷) اگر $-1 < n$ نشان دهید که به ازای هر n

$P(n): (1+x)^n \geq 1 + nx$

فرض کنید $P(n)$ درست است

$$P(1):\ (1+x)^1 \geq 1 + x$$
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2$$
$$\geq 1 + (n+1)x$$

رابطه ها

فرض کنید که $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو مجموعه باشد. چنانچه $R \subseteq A * B$ باشد، گوییم $\mathcal{R}$ یک رابطه $\mathcal{A}$ در $\mathcal{B}$ میباشد. اگر $A = B$ باشد گئیم $\mathcal{R}$ یک رابطه در $\mathcal{A}$ میباشد.

مثال) فرض کنید که $A = Z = \{0. \pm1. \pm2. \ldots\}$ و به معنی عاد (شمردن) کردن باشد، در این صورت $\mathcal{R}$ یک رابطه در Z میباشد.

$3|12 \rightarrow 4$

$2|8 \rightarrow 4$

$7|28 \rightarrow 4$

نکته:

$R = \{(1.7).(1.6).(3.13).(2.8).(7.28).\ldots\}$

$(3.7) \notin R$

نمایش رابطه با ماتریس

اگر $A = \{a_1.a_2.\ldots.a_n\}$ و $B = \{b_1.b_2.\ldots.b_m\}$ چنانچه $\mathcal{R}$ رابطه ای از $\mathcal{A}$ در $\mathcal{B}$ باشد ماتریس $M_R =$ $[m_{ij}]_{n*m}$ را بصورت زیر نمایش میدهیم.

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i \mathcal{R} b_j \\ 0 & a_i \not\mathcal{R} b_j \end{cases}$$

مثال) اگر $A = \{1.2.3\}$ و $B = \{a.b\}$ و رابطه $\mathcal{R}$ از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ بصورت $R =$ $\{(1.a).(2.b).(3.a)\}$ تعریف شود در اینصورت ماتریس رابطه $\mathcal{R}$ ؟

$A * B = \{(1.a).(1.b).(2.a).(2.b).(3.a).(3.b)\}$

$R = \{(1.a).(2.b).(3.a)\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

نکته: این نوع ماتریس ها را بولی نامند.

عملیات منطقی روی ماتریس بولی

فرض کنید که $A = [a.j]_{n*m}$ و $B = [b.j]_{n*m}$ در این صورت ماتریس $A \vee B = [c.j]_{n*m}$ به نام وست (join) که بصورت زیر تعریف میشود

$$C_{ij}=\begin{cases}1. & a_{ij}=1 \quad \vee \quad b_{ij}=1\\ 0. & a_{ij}=0 \quad \vee \quad b_{ij}=0\end{cases}$$

ماتریس $A \wedge B=[d_{ij}]_{n*m}$ به نام سند (meet) بصورت زیر تعریف میشود.

$$d_{ij}=\begin{cases}1. & a_{ij}=b_{ij}=1\\ 0. & a_{ij}\neq b_{ij}\neq 0\end{cases}$$

مثال) ماتریس زیر را فرض کنید، مطلوب است $A \vee B$ و $A \wedge B$؟

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}_{4*3} \quad B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{4*3}$$

$$A\vee B=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix} \quad A\wedge B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ضرب بولی

فرض کنید که حاص ضرب بولی $\mathcal{A}$ در $\mathcal{B}$ که با $AQB=[C_{ij}]_{n*m}$ نمایش داده میشود بصورت زیر است

$$C_{ij}=\begin{cases}1. & A_i * B^j \geq 1\\ 0. & A_i * B^j = 0\end{cases}$$

$$B=[b_{ij}]_{p*m}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\dots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\dots&b_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{p1}&b_{p2}&&b_{pm}\end{bmatrix} \quad (\text{columns } b_1, b_2, \dots, b_m) \qquad A=[a_{ik}]_{n*p}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1p}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{np}\end{bmatrix}\begin{matrix}A_1\\A_2\\\\A_m\end{matrix}$$

مثال) مطلوب است $A\odot B$؟

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{4*3} \quad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}_{3*4}$$

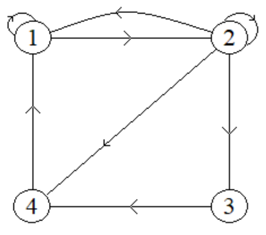
$$A\odot B=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\1&1&1&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}_{4*4} \quad (1.1.0)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=1+0+0\geq 1$$

نکته: طبق تعریف A_1 در b_1 ضرب میشود و الاآخر مطابق توضیح تصویری بالا و سپس حاصل جمع میشود. لازم به ذکر است که حاصل جمع اگر بالای یک بود یک قرار میدهیم.

نمایش رابطه با گراف سودار

فرض کنید که A متناهی و R یک رابطه در A باشد به ازای هر عضو A یک دایره کوچک رسم میکنیم (به نام راس) یال سودار (جهت دار) را از a به b وصل میکنیم به شرط اینکه aRb برقرار باشد.

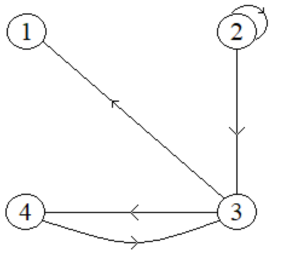
مثال) $A = \{1.2.3.4\}$، $R = \{(1.1).(1.2).(2.2).(2.3).(2.4).(3.4).(4.1)\}$ مطلوب است گراف سودار و متناظر رابطه R؟



$R \subseteq A * A$

نکته: در گراف متناظر با هر گراف سودار یک رابطه وجود دارد.

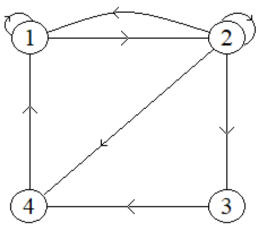
مثال) مطلوب است رابطه متناظر با گراف سودار روبرو؟



$R = \{(2.2). (2.3). (3.1). (3.4). (4.3)\}$

مسیر به طول n در گراف سودار از x_0 به x_n که با دنباله $x_0 . x_1 . x_2 . \dots . x_{n-1} . x_n$ نمایش داده میشود به شرط اینکه $\begin{cases} i = 1.2. \dots . n \\ x_i \; R \; x_i \end{cases}$

مثال) در شکل زیر مسیر π_1 به طول ۳ مسیری از ۱ به ۴ است؟



$\pi_1: 1.2.3.4$　　　(مدار) $\pi_1: 1.2.3.4.1$

"فصل دوم"

خواص رابطه

۱. **رابطه بازتابی:** اگر $\mathcal{R}$ رابطه ای در $\mathcal{A}$ باشد، $\mathcal{R}$ را بازتابی نامند، در صورتی که $\forall A \in A \,.\, aRa$. R را ضد بازتابی نامند، در صورتی که به ازای

$(a.a) \in R$ $\quad \forall a \in A \ a\not{R}a$

مثال) $A = \{1.2.3\}$ ، $R = \{(1.1).(1.2).(2.2).(2.3).(3.3)\}$

$\mathcal{R}$= بازتابی است

مثال) $A = \{1.2.3\}$ ، $R = \{(1.1).(1.2).(2.2)\}$

$\mathcal{R}$= بازتابی نیست

مثال) $A = \{1.2.3\}$ ، $R = \{(1.2).(1.3).(2.1).(2.3).(3.1)\}$

$\mathcal{R}$= ضد بازتابی است

۲. **رابطه متقارن:** رابطه $\mathcal{R}$ در $\mathcal{A}$ را متقارن نامند، در صورتی که $aRb \rightarrow bRa$ ،

$(a.b) \in R \rightarrow (b.a) \in R$

مثال) $A = \{1.2.3\}$ ، $R = \{(1.2).(2.1).(3.1).(1.3)\}$

متقارن است

مثال) $A = \{1.2.3\}$ ، $R = \{(1.2).(2.1).(3.1).(1.3).(2.3)\}$

متقارن نیست

رابطه ضد متقارن: رابطه $\mathcal{R}$ را در $\mathcal{A}$ ضد متقارن نامند، در صورتی که $aRb.bRa \to a.b$

$(a.b) \in R.(b.a) \in R \to a = b$

مثال) S یک مجموعه است $A = p(s) = \{B.B \subseteq S\}$

$\mathcal{R}$= رابطه جزئیت است

$\mathcal{R}$= ضد متقارن است

$$B_1RB_2 <-> B_1 \subseteq B_2$$
$$B_1 \subseteq B_2.B_2 \subseteq B_1 \to B_1 = B_2$$
$$B_1RB_2.B_2RB_1 \to B_1 = B_2$$

۳. **رابطه متعدی:** رابطه $\mathcal{R}$ در $\mathcal{A}$ را متعدی نامند در صورتی که $(a.b) \in R.(b.c) \in R \leftrightarrow (a.c) \in R$

$aRb.bRc \leftrightarrow aRc$

مثال) S یک مجموعه $A = P(s). \quad R \equiv \subseteq$

$\mathcal{R}$ در $\mathcal{A}$ متعدی است

$$xRy \quad . \quad yRz$$
$$x \subseteq y \quad . \quad y \subseteq z \to x \subseteq z \ (xRz)$$

مثال) فرض کنید $S = \{1.2.3\}$ ، $A = P(s) = \{\emptyset.\{1\}.\{2\}.\{3\}.\{1.2\}.\{1.3\}.\{2.3\}.\{1.2.3\}\}$

متعدی است

۴. **رابطه هم ارزی:** رابطه $\mathcal{R}$ در $\mathcal{A}$ را هم ارزی نامند، در صورتی که بازتابی، متقارن، متعدی باشد.

مثال) $A = \{1.2.3.4\}$ ،

$R = \{(1.1).(1.2).(1.3).(2.2).(2.1).(2.3).(3.2).(3.3).(4.4).(3.1)\}$

$\mathcal{R}$ رابطه هم ارزی است

کلاس هم ارزی: اگر R یک رابطه هم ارزی در A باشد، $a \subseteq A$ کلاس هم ارزی a که با $[a] = R(a)$ نشان میدهد عبارت است از $[a] = \{B: aRb\}$

مثال) طبق مثال قبل یک را پیدا کنید.

$$[1] = \{1.2.3\} = [2] = [3]$$
$$[4] = \{4\}$$

مجموعه خارج قسمت: $\frac{A}{R} = \{[1].[4]\}$

مثال) $A = Z = \{0. \pm 1. \pm 2. \dots\}$

$$aRb \leftrightarrow 7|b-a$$
$$b \equiv a(mod7)$$

b همنهشت با a به هنگ 7

R رابطه هم ارزی است

بازتابی $\rightarrow a \equiv a(mod7) \leftrightarrow 7|a-a=0$

متقارن $\rightarrow b \equiv a(mod7) \rightarrow 7|b-a$

$$b-a=7k \rightarrow a-b=7(-k) \rightarrow a \equiv b(mod7)$$

متعدی $\rightarrow b \equiv a(mod7).c \equiv b(mod7)$

$$b-a=7k_1.c-b=7k_2$$
$$+$$
$$c-a=7(k_1+k_2)$$
$$c \equiv a(mod7)$$

خارج قسمت $\rightarrow$

$$[0] = \{\dots\ .-14.-7.0.7.14.\dots\}$$
$$[1] = \{\dots\ .-13.-6.1.6.13.\dots\}$$
$$[2] = \{\dots\ .-12.-5.2.5.12.\dots\}$$
$$[3] = \{\dots\ .-11.-4.3.4.11.\dots\}$$
$$[4] = \{\dots\ .-10.-3.4.3.10.\dots\}$$

$$[5] = \{\dots\ .-9.-2.5.2.9.\dots\}$$
$$[6] = \{\dots\ .-8.-1.6.1.8.\dots\}$$
$$\frac{A}{R} = \{[0].[1].[2].[3].[4].[5].[6]\}$$

تابع: فرض کنید که A و B دو مجموعه غیر تهی باشد ف تابع f از A به B $(f: A \to B)$ رابطه

$(f \subseteq A * B)$ است بطوری که به ازای هر a $a \in A = Dom(f)$ $f(a) = \{b: (a.b) \in f\}$ فقط شامل یک عنصر

مانند b $(b \in B)$ باشد یعنی $f(a) = \{b\}$

مثال) $A = \{1.2.3\}$، $B = \{a.b.c.d\}$، $f = \{(1.b).(2.d).(3.d)\}$

تابع است زیرا:

$$f(1) = \{b\}\ \ b = f(1)$$
$$f(2) = \{d\}\ \ b = f(2)$$
$$f(3) = \{d\}\ \ b = f(3)$$

مثال) $A = \{1.2.3\}$، $B = \{a.b.c.d\}$، $g = \{(1.b).(2.c).(3.c).(1.d)\}$

تابع نیست زیرا:

$$g(1) = \{b.d\}$$

برد $R = n(f) = \{b: b \in B. f(a) = b. a \in A\}$

مجموعه های مرتب

فرض کنید R یک رابطه در A باشد. رابطه R را یک ترتیب جزئی نامند، درصورتی که R بازتابی، ضد متقارن و متعدی باشد. مجموعه A را دارای ترتیب جزئی گویند و با علامت (A,R) نشان میدهند.

مثال) $A = P(S).(A.\subseteq)$ یک ترتیب جزئی است.

بازتابی $B \subseteq B$

ضد متقارن $B_1 \subseteq B_2 . B_2 \subseteq B_1 \rightarrow B_1 = B_2$

متعدی $B_1 \subseteq B_2 . B_2 \subseteq B_3 \rightarrow B_1 \subseteq B_3$

مثال) $A = Z^+ = \{1.2.3. \dots\}$ نشان دهید که $(A. \leq)$ ترتیب جزئی است.

$a \leq a$

$a \leq b . b \leq a \rightarrow a = b$

$a \leq b . b \leq c \rightarrow a \leq c$

مثال) $A = Z^+ = \{1.2.3. \dots\}$ رابطه عاد کردن $(Z^+ . |)$

$a|a \leftrightarrow a = |a$

$a|b . b|a \rightarrow a|b . b|c \rightarrow b = k_1 a . c k_2 b = k_2 k_1 a \rightarrow a|c$

$b = k_1 a . a = k_2 b \rightarrow b = k_1 k_2 b = k_2 k_1 \rightarrow k_1 = k_2 = 1 \rightarrow a = b$

نمودار هاس

اگر $(\mathcal{A},\mathcal{R})$ یک ترتیب جزئی در $\mathcal{A}$ باشد. ($\mathcal{A}$ متناهی است) همه رئوس حلقه دارند، سپس:

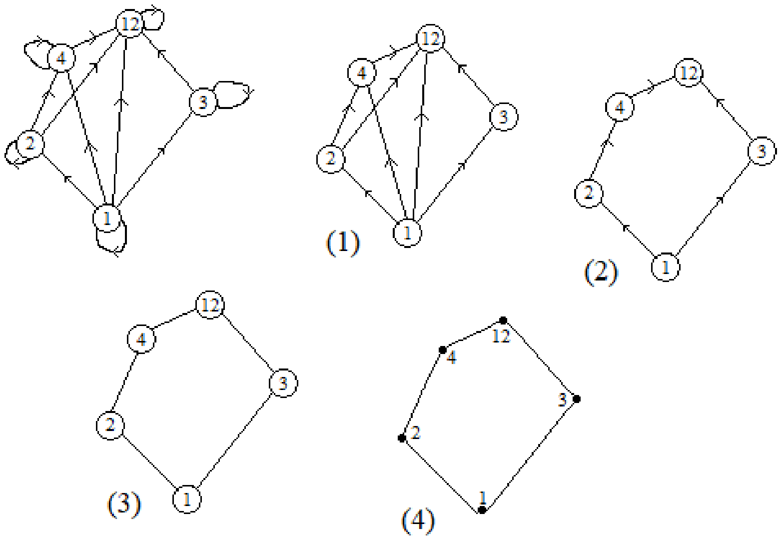
۱. همه حلقه ها را حذف میکنیم

۲. همه یالهای حاصل از تعدی را حذف میکنیم

۳. جهت یالها را حذف و گراف را از پایین به بالا سرم میکنیم

۴. بجای دایره برای رئوس نقطه میگذاریم

مثال) $A = \{1.2.3.4.12\}$. $(A.|\quad)$ نمودار هاس را برای رابطه رسم کنید.

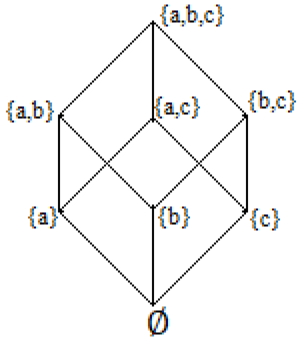


مثال) نمودار هاس $(A.\subseteq)$ را رسم کنید.

$A = 2^3 \qquad s = \{a.b.c\}$

$A = P(s) =\subseteq$

$P(s) = \{\emptyset.\{a\}.\{b\}.\{c\}.\{a.b\}.\{a.c\}.\{b.c\}.\{a.b.c\}\}$



یک ریختی (ایزومورفیسم)

فرض کنید که $(A.\leq)$ و $(A'.\leq')$ دو مجموعه با ترتیب جزئی باشند. چنانچه $f: A \dashrightarrow A'$ یک تناظر یک به یک بین A و A' باشد.

اگر $a \leq b \rightarrow f(x) \leq' f(b)$ در اینصورت گوییم تابع f یک ایزومورفیسم (یک ریختی) است و A ، A' را یک ریخت (ایزومورف) نامند.

مثال) $S=\{a.b\}.A=P(s).(A.\subseteq).A'=\{1.2.3.6\}.(A'.|\quad)$ نشان دهید که A و A' ایزومورف است.

$$2^2=4$$

$$F: A --\to A'$$

$$P(s)=(a.b)=\{\emptyset.(a).(b).(a.b)\}$$

$$f(\emptyset)=1$$

$$f(\{a\})=2$$

$$f\{(a.b)\}=3$$

$$f\{(a.b)\}=6$$

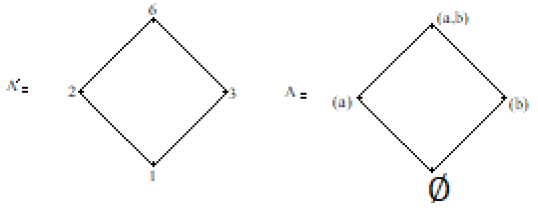
$$\emptyset\subseteq\{a\}\to 1|2$$

$$\emptyset\subseteq\{b\}\to 1|3$$

$$\emptyset\subseteq\{a.b\}\to 2|6$$

پس f یک (یک ریختی) است

$$\{\emptyset\}\subseteq\{a.b\}\to 1|6$$



ترتیب جزئی

فرض کنید که $(A.\leq)$ مجموعه ای با ترتیب جزئی باشد.

← فرض کنید که $(B\subseteq A)$ ، $(a\in A)$ را کرانه بالایی B نامند ، درصورتی که $a\in A.\forall b\in B\to b\leq a$

را کرانه پایینی B نامند، درصورتی که $\forall b\in B\to a\leq b$.

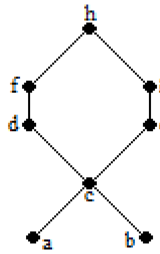
$\leftarrow a \in A$ را کوچکترین کرانه بالایی B نامند، درصورتی که:

۱. $\forall b \in B \rightarrow b \leq a$
۲. اگر a' یک کرانه بالادی B باشد آنگاه $a \leq a'$، در اینصورت مینویسیم $a = LUB(B)$

$\leftarrow a \in A$ را بزرگترین کرانه پایینی $B(GLB(B))$ نامند، درصورتیکه:

۱. $\forall b \in B \rightarrow a \leq b$
۲. اگر a' یک کرانه پایینی B باشد، آنگاه $a' \leq a$

مثال) $A = \{a.b.c.d.e.f.g.h\}$ و نمودار هاس آن رسم شده، $B_2 = \{d.c.e\}$ ، $B_1 = \{a.b\}$ برای B_1 و



B_2 کرانه بالا و پایین و کوچکترین کرانه بالا و بزرگترین کرانه پایین را بیابید.

۱) B_1 کرانه پایین ندارد

۲) $h.g.f.d.e.c$ کرانه بالایی B_1 هستند

۳) کوچکترین کرانه بالا $LUB(B_1) = c$

۴) بزرگترین کرانه پایین ندارد $GLB(B_1) =$

۵) $c.b.a$ کرانه پایین B_2 هستند

۶) $h.g.f$ کرانه بالایی B_2 هستند

۷) ندارد $LUB(B_2) =$ ،، زیرا f و g مقایسه نمیشوند،،

۸) $GLB(B_2) = c$

مشبکه ($\mathcal{Lattic}$)

فرض کنید که $(L. \leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد، $(L. \leq)$ را یک مشبکه نامند، در صورتی که $a.b \in L$

$$LUB\{a.b\} = a \vee b$$

$$GLB\{a.b\} = a \wedge b$$

موجود میباشند.

مثال) S یک مجموعه، $\mathcal{L}=\mathcal{P}(s)$ و $(L. \subseteq)$ یک مشبکه است.

$$B_1.B_2 \in L(B_1.B_2 \subseteq S)$$

$$LUB\{B_1.B_2\} = B_1 \vee B_2 = B_1 \cup B_2$$

$$GLB\{B_1.B_2\} = B_1 \wedge B_2 = B_1 \cap B_2$$

نکته: جدول صفحه ۱۵۸

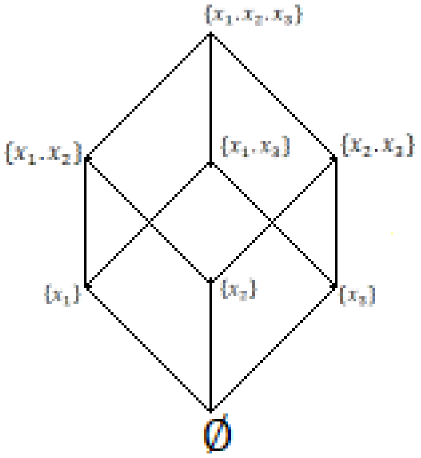
۱. $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $A \cup B = B$	$1'$. $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x \vee y = y$
۲. $A \subseteq B$ اگر و تنها اگر $A \cap B = A$	$2'$. $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x \wedge y = x$
۳. قانون خودتوانی در جبر مجموعه ها الف) $A \cup A = A$ ب) $A \cap A = A$	$3'$. قانون خوتوانی در جبر بول $\left(\text{الف}\right)'$ $x \vee x = x$ $(\text{ب})'$ $x \wedge x = x$
۴. قانون جابجایی در جبر مجموعه ها الف) $A \cup B = B \cup A$	$4'$. قانون جابجایی در جبر بول $\left(\text{الف}\right)'$ $x \vee y = y \vee x$

ب) $A \cap B = B \cap A$	$'$(ب) $x \wedge y = y \wedge x$
۵. قانون شرکت پذیری در جبر مجموعه ها الف) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$5'$. قانون شرکت پذیری در جبر بول $'$(الف) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y)vz$ $'$(ب) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
۶. قانون جذبی در جبر مجموعه ها الف) $A \cup (A \cap B) = A$ ب) $A \cap (A \cup B) = A$	$6'$. قانون جذبی در جبر بول $'$(الف) $x \vee (x \wedge y) = x$ $'$(ب) $x \wedge (x \vee y) = x$
۷. $\emptyset \subseteq A \subseteq S . \forall \in P(S)$	$7'$. $0 \leq x \leq I \ . \ \forall x \in L$
۸. الف) $A \cup S = S$ ب) $A \cap \emptyset = \emptyset$	$8'$. $'$(الف) $x \vee \emptyset = x$ $'$(ب) $x \wedge \emptyset = \emptyset$
۹. الف) $A \cup S = S$ ب) $A \cap S = A$	$9'$. $'$(الف) $x \vee I = I$ $'$(ب) $x \wedge I = x$
۱۰. قانون پخش پذیری در جبر مجموعه ها الف) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ب) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$10'$. قانون پخش پذیری در جبر بول $'$(الف) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ $'$(ب) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

۱۱. هر عضو مثل $\mathcal{A}$ دارای متمم منحصر به فردی است مثل A' به گونه ای که: الف) $A \cup A' = S$ ب) $A \cap A' = \emptyset$	$11'$. هر عضو مثل x دارای متمم منحصر به فردی است مثل x' به گونه ای که: الف)' $x \vee x' = I$ ب)' $x \wedge x' = 0$
۱۲. الف) $\overline{\emptyset} = S$ ب) $A \cap A' = \emptyset$	$.12'$ الف)' $0' = I$ ب)' $I' = 0$
۱۳. $\overline{\overline{(A)}} = A$	$(x')' = x$ $.13'$
۱۴. قانون دمورگان در جبر مجموعه ها الف) $(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$ ب) $(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$	$14'$. قانون دمورگان در جبر بول الف)' $(x \wedge y)' = x' \vee y'$ ب)' $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

مثال) $S=\{x_1.x_2.x_3\}$

$L\subseteq P(s)$



$$\{x_1\}\vee\{x_{1.}x_2\}=\{x_1.x_3\}$$

$$\{x_1\}\vee\{x_3\}=\{x_1.x_3\}$$

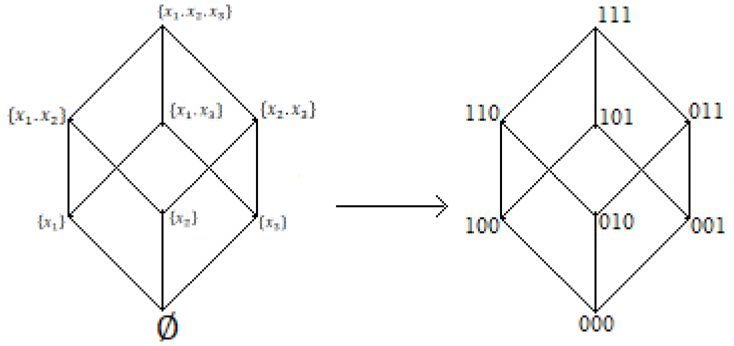
$$\{x_1\}\wedge\{x_2\}=\emptyset$$

$$\{x_1.x_3\}\vee\{x_2.x_3\}=\{x_1.x_2.x_3\}$$

$$\{x_1.x_3\}\wedge\{x_2.x_3\}=\{x_3\}$$

جبر بول

B_3

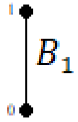


x_1	x_2	x_3

بودن ۱ و نبودن ۰

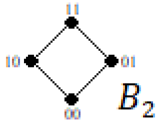
B_3 را جبر بول نامند

مثال) $S = \{x_1\}$



مثال) $S = \{x_1 . x_2\}$

$$P(s) = \{\emptyset . x_1 . x_2 . \{x_1 . x_2\}\}$$



نکته: اگر B_n یک جبر بول و $a . b \in B_n$

$$a = a_1\, a_2 \dots a_n$$

$$b = b_1\, b_2 \dots b_n$$

$$a \vee b = c_1 c_2 \dots c_n \qquad c_i = \max\{b_i . a_i\}$$

$$a \wedge b = d_1 d_2 \dots d_n \qquad d_i = \min\{a_i . b_i\}$$

$$a \leq b \leftrightarrow a_i \leq b_i \qquad i = 1.2. \dots . n$$

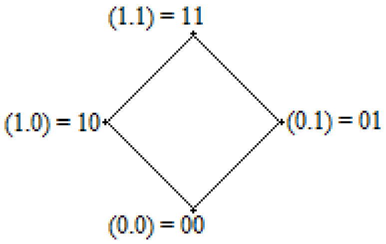
اگر $a \in B_n$ باشد متمم a که با a' نشان میدهیم

$$a' = \propto_1 \propto_2 \dots \propto_n$$

$$\propto_i \begin{cases} 1 \ . & a_i = 0 \\ 0 \ . & a_i = 1 \end{cases}$$

$$a = 100 \leftrightarrow a' = 011$$

توابع بولی



قضیه: اگر $B = \{0.1\}$ باشد آنگاه $B_n \cong B * B * \dots * B = B^n$

هر تابع بصورت $f: B_n \dashrightarrow B = \{0.1\}$ را تابع بولی مینامند.

مثال) $f: B_n \dashrightarrow B$

x_1	x_2	x_3	$f(x_1.x_2.x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

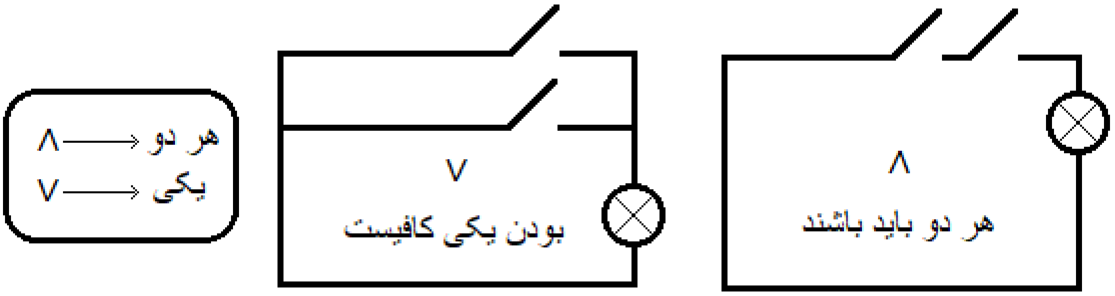
چند جمله ای بولی

۱) $x_1 . x_2 . \dots . x_n$ چند جمله ای بولی میباشند.

۲) $I . 0$ چند جمله ای بولی هستند.

۳) اگر $P . Q$ چند جمله ای بولی باشند، آنگاه $P \wedge Q \,.\, P \vee Q$ چند جمله ای بولی است.

۴) اگر P چند جمله ای بولی باشد، P' هم چند جمله ای بولی است.



مثال) جدول درستی عبارت زیر، را تشکیل دهید، در B_2

$$P(x.y.z) = (x \wedge y) \vee \left(x \vee (y' \wedge z)\right)$$

x	y	z	y'	$y' \wedge z$	$x \wedge y$	$x \vee (y' \wedge z)$	$p(x.y.z)$
1	**1**	**1**	0	0	1	1	1
1	**1**	**0**	0	0	1	1	1
1	**0**	**1**	1	1	0	1	1
1	**0**	**0**	1	0	0	1	1
0	**1**	**1**	0	0	0	0	0
0	**1**	**0**	0	0	0	0	0
0	**0**	**1**	1	1	0	1	1
0	**0**	**0**	1	0	0	0	0

پیدا کردن چند جمله ای متناظر با توابع بولی

لیترال که با علامت $\overline{x_i}$ نشان میدهیم عبارت است از $\overline{x_i} = x_i$ یا $\overline{x_i} = x_i$

مثال) در $B_3 \in (x.y.z)$

$\bar{x} = x$ یا $x = \bar{x}$

← کمینه عبارت است از $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge \dots \wedge \overline{x_n}$

مثال) در $B_3 \in (x.y.z) \leftarrow x' \wedge y' \wedge z'.x \wedge y \wedge z.x' \wedge y \wedge z'$

← شکل نرمال فصلی (dnf) عبارت است از ترکیب فصلی کمینه ها

مثال)

$B_3 \in (x.y.z) \leftarrow (x \wedge y \wedge z) \vee (x' \wedge y \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z')$ یک dnf است

$$f: B_n \dashrightarrow B$$
$$S(f) = \{b = (b_1. b_2. \dots . b_n) \in B_n f(b) = 1\}$$

مثال) تبدیل جدول

x	y	z	$f(x.y.z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

$$S(f) = \{(1.1.1).(1.1.0).(1.0.1)\}$$
$$P(x.y.z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z') \vee (x \wedge y' \wedge z)$$
$$= \big((z \wedge y) \wedge (z \vee z')\,I \ \vee (x \wedge y' \wedge z)\big)$$
$$= (x \wedge y) \vee (x \wedge y' \wedge z)$$
$$= x \wedge \big(y \vee (y' \wedge z)\big)$$
$$= x \wedge \big((y \vee y') \wedge (y \vee z)\big)\, I$$
$$= x \wedge (y \vee z)$$

$$S(f)=\{(1.1.1).(1.1.0).(1.0.1)\}$$

x	y	z	$f(x.y.z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

$$P(x.y.z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge y\wedge z')\vee(x\wedge y'\wedge z)$$

$$=\big((z\wedge y)\wedge\underbrace{(z\vee z')}_{I}\big)\vee(x\wedge y'\wedge z)\big)$$

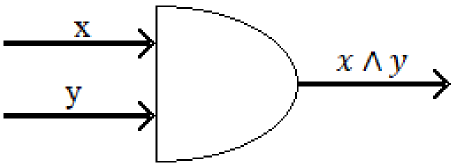
$$=(x\wedge y)\vee(x\wedge y'\wedge z)$$

$$=x\wedge\big(y\vee(y'\wedge z)\big)$$

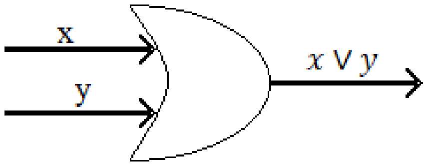
$$=x\wedge\big(\underbrace{(y\vee y')}_{I}\wedge(y\vee z)\big)$$

$$=x\wedge(y\vee z)$$

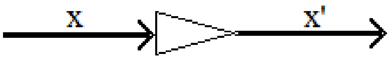
دریچه ها



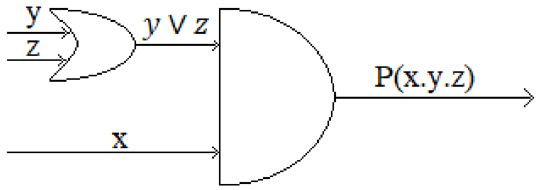
دریچه یا



دریچه نه



مثال) مدار $P(x.y.z)=f(x.y.z)=x\wedge(y\vee z)$ را رسم کنید



رابطه بازگشتی

چنانچه در دنباله $\{a_n\}$ جمله عمومی برحسب n چند جمله ای قبلی بیان شود رابطه را بازگشتی مینامند.

$$a_n = 3a_{n-1}$$

$$a_0 = 1$$

شرط مرزی (اولیه)

دنباله $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_0 . a_1 . a_2 . \dots\}$

دنباله $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\left\{1 . \frac{1}{2} . \frac{1}{4} . \frac{1}{8} . \dots\right\}$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \qquad a_0 = 1 \; . \; a_1 = 2$$

حل رابطه بازگشتی

رابطه بازگشتی مرتبه اول

چنانچه در دنباله $\{a_n\}$ جمله عمومی a_n برحسب a_{n-1} بیان شده باشد، رابطه را مرتبه اول مینامند.

مثال) $a_0 = 1$ $\quad a_n = na_{n-1}$ مطلوب است فرمول جمله عمومی

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1a_0 \Rightarrow 1 = 1!$$

$$a_2 = 2a_1 \Rightarrow 2 * 1 = 2!$$

$$a_3 = 3a_2 \Rightarrow 3 * 2 = 3!$$

$$a_4 = 4a_3 \Rightarrow 4 * 3 * 2 = 4!$$

$$a_5 = 5a_4 \Rightarrow 5 * 4 * 3 * 2 = 5!$$

.
.
.

$$a_n = n!$$

$$a_{n+1} = (n+1)a_n = (n+1)n! = (n+1)!$$

مثال) $a_0 = 1$　$a_n = 4a_{n-1} + 1$ مطلوب است a_n

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = 5 = 4 + 1$$
$$a_2 = 21 = 4^2 + 4 + 1$$
$$a_3 = 85 = 4^3 + 4^2 + 4 + 1$$
$$a_4 = 341 = 4^4 + 4^3 + 4^2 + 4 + 1$$

.
.
.

$$a_n = 4^n + 4^{n+1} + \cdots + 4^2 + 4 + 1$$

$$a_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$$

$$n = 0 \Rightarrow a_0 = 1$$

رابطه بازگشتی مرتبه دو

$$a_n = \propto a_{n-1} + \beta a_{n-2}$$

$a_0 . a_1$ معلوم

معادله جبری $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{x^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r^2 = \propto r + \beta$$

$$r^2 - \propto r - \beta = 0$$

$$r = \frac{\propto \pm \sqrt{\propto^2 + 4\beta}}{2}$$

۱. ریشه های r_1 و r_2 حقیقی و متمایز میباشند $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ با استفاده از a_0 و a_1 ضرائب c_1 و c_2 محاسبه میشود.

مثال) رابطه بازگشتی را حل کنید $a_0 = 2 . a_1 = 3$　$a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$

$$r^2 + r - 6 = 0$$
$$(r-2)(r+3) = 0$$
$$r = 2 . -3$$
$$a_n = c_1 2^n + c_2 (-3)^n$$

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 3 = 2c_1 - 3c_2 \Rightarrow 9 = 5c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{9}{5} \end{cases}$$

$$c_2 = 2 - c_1 = 2 - \frac{9}{5} = \frac{1}{5}$$

$$a_n = \frac{9}{5}(2)^n + \frac{1}{5}(-3)^n$$

مثال) رابطه بازگشتی (دنباله فیبوناتچی) $a_0 = 1 . a_1 = 1$ 　　$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \to r_1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \;.\; r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$a_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

۲. اگر $r_1 = r_2 = \frac{\propto}{2}$، $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_1^n$

مثال) $a_0 = 1 . a_1 = 3$ 　　$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)^2 = 0$$

$$r_1 = r_2 = 2$$

$$a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n$$

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 3 = 2c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2^n + \frac{1}{2} n 2^n \Rightarrow a_n = 2^n + n2^{n-1}$$

مثال) $a_0 = 1 . a_1 = 1$ 　　$a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$

$$r^2 - 8r + 16 = 0$$

$$(r-4)^2=0$$
$$r_1=r_2=4$$
$$a_n=c_1 4^n+c_2 4^n$$
$$\begin{cases}1=c_1\\ 1=4c_1+4c_2 \Rightarrow c_2=\frac{3}{4}\end{cases}$$
$$a_n=c_1 4^n+c_2 n4^n$$
$$a_n=4^n-\frac{3}{4}n4^n$$
$$a_n=4^n-3n4^{n-1}$$

رابطه بازگشتی مرتبه دو

$a_n=\propto a_{n-1}+\beta a_{n-2}$

$a_0.a_1$ معلوم

$r^2=\propto r+\beta$ معادله مشخصه

$r^2-\propto r-\beta=0$

$\Delta=\propto^2+4\beta<0$ (ج)

$r=\frac{\propto \pm\sqrt{\propto^2+4\beta}}{2}$

$r=\frac{\propto\pm i\sqrt{-(\propto^2+4\beta)}}{2}$

$r=t\pm is$ نمایش عدد مختلط مزدوج

$t+is=he^{i\theta}$ بصورت نمائی (دوقطبی)

$h=\sqrt{t^2+s^2}\ .\ tan\theta=\frac{s}{t}$

$a_n=h^n(c_1\cos n\theta+c_2\sin n\theta)$

مثال) $a_0=1\ .\ a_1=2$ $\quad a_n=2a_{n-1}-2a_{n-2}$

$$r^2-2r+2=0$$
$$r=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\frac{2\pm i2}{2}=1\pm i$$
$$t=1\ .\ s=1$$

$$h = \sqrt{t^2 + s^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$tan\theta = \frac{s}{t} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(c_1 cos\frac{n\pi}{4} + c_2 sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 1 = c_1 \\ 2 = \sqrt{2}\left(c_1 cos\frac{\pi}{4} + c_2 sin\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + c_2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$2 + 1 + c_2 \rightarrow c_2 = 1$$

$$a_n + 2^{\frac{n}{2}}\left(cos\frac{n\pi}{4} + sin\frac{n\pi}{4}\right)$$

مثال) $a_1 = 3 \;\; . \;\; a_2 = 0 \qquad a_n = 3a_{n-1} - 9a_{n-2}$

$$r^2 = 3r - 9$$

$$r^2 - 3r + 9 = 0$$

$$r = \frac{3 \pm \sqrt{9-36}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-27}}{2} = \frac{3 \pm i3\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \pm i\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$t = \frac{3}{2} \;\; . \;\; s = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{27}{4}} = \sqrt{9}$$

$$h = 3$$

$$tan\theta = \frac{s}{t} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \qquad \frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2} = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$a_n = 3^n\left(c_1cos\frac{n\pi}{3} + c_2sin\frac{n\pi}{3}\right)$$

$$\begin{cases} 3 = 3\left(c_1cos\frac{\pi}{3} + c_2sin\frac{\pi}{3}\right) \\ 0 = 3^2\left(c_1cos\frac{2\pi}{3} + c_2sin\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 3\left(c_1\frac{1}{2} + c_2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 0 = 9\left(-\frac{1}{2}c_1 + c_2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$$

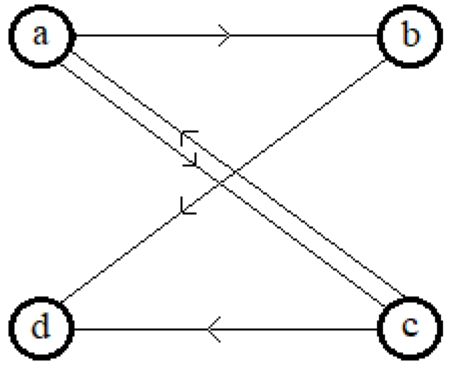
$$\begin{cases} \frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 1 \rightarrow \ c_1 = 1 \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 = 0 \rightarrow \ c_2 \Rightarrow \sqrt{3}c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

گراف

گراف سودار: عبارت است از مجموعه ای متناهی مانند V که اعضای آن را رئوس گراف مینامند و مجموعه ای از زوجهای مرتب بصورت $(a.b)$ به نام (یال)

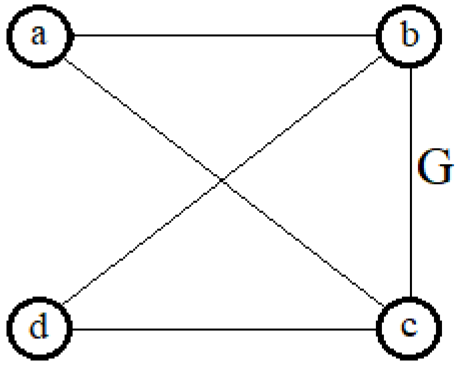
$G = (V.E)$

مثال) $V = \{a.b.c.d\} \rightarrow E = \{(a.b).(a.c).(b.d).(c.a).(c.d)\}$

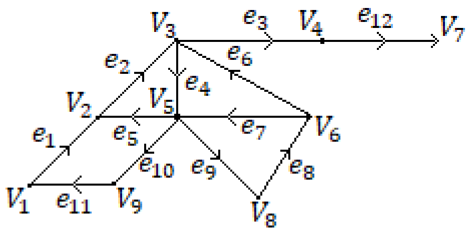


گراف بیو: عبارت است از مجموعه ای متناهی مانند V که اعضای آن را رئوس گراف نامند و مجموعه ای از یالها بصورت $\{a.b\}$ که آن را با E نشان میدهیم.

مثال) $V=\{a.b.c.d\}\rightarrow E\{\{a.b\}.\{b.c\}.\{a.c\}.\{c.d\}.\{b.d\}\}$



مسیرها در گراف سودار: مسیر رشته ای، از یالها بصورت $e_{i_1}e_{i_2}\dots e_{i_k}$ بطوری که ابتدای یال e_{i_2} بر انتهای یال e_{i_1} و انتهای آن بر ابتدای یال e_{i_3} واقع است.

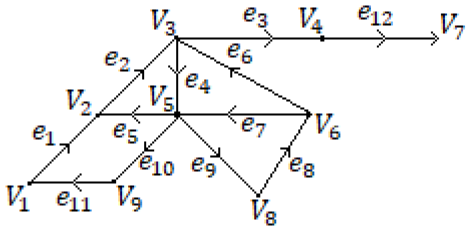


یک مسیر است $\begin{cases}V_1V_2V_3V_4V_7\\ e_1e_2e_3e_{12}\end{cases}$

$$a_n=\frac{4^{n+1}-1}{3}$$

یک مسیر است $\begin{cases}e_1e_2e_4e_9e_8\\ V_1V_2V_3V_5V_8V_6\end{cases}$

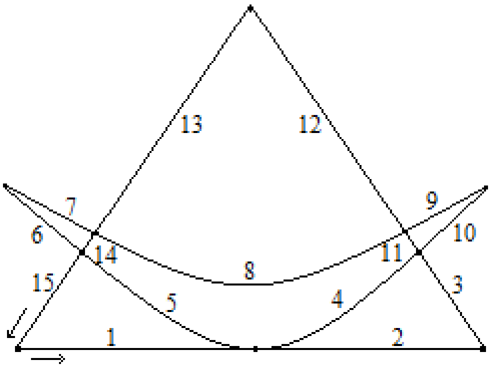
مدار: مسیری است که انتهای یال e_{i_k} بر ابتدای یال e_{i_1} واقع است.



یک مدار است $\begin{cases}e_1e_2e_4e_{10}e_{11}\\ V_1V_2V_3V_9V_1\end{cases}$

یک مدار است $\begin{cases}e_1e_2e_4e_9e_8e_7e_{10}e_{11}\\ V_1V_2V_3V_5V_8V_6V_5V_9V_1\end{cases}$

یک مدار است $\rightarrow e_9e_8e_7$

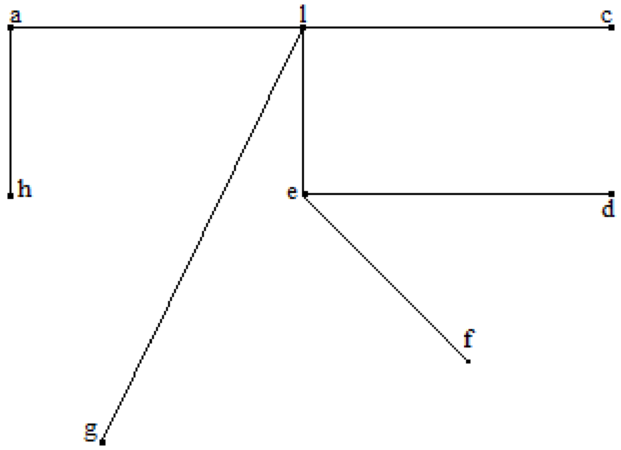


تمام درجه رئوس موجود در گرف زوج است

درخت ها

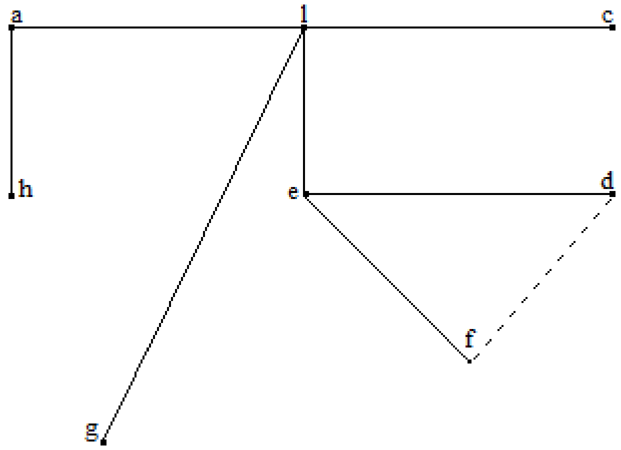
گراف $G = (V; E)$ بی سو و بدون یال (حلقه) را درخت نامند، در صورتی که همبند باشد و دارای دور باشد.

مثال) گراف زیر یک درخت است.



$|V| = 8 \ . \ |E| = 7$

در صورت اضافه شدن یال دیگر درخت نیست چون دارای دور میشود.



قضیه۱: اگر $T = (V.E)$ یک درخت باشد بین هر دو رأس a و b یک مسیر منحصر بفرد موجود دارد. (بین هر رأس درخت یک مسیر منحصر بفرد وجود دارد)

قضیه۲: اگر $T = (V.E)$ درخت باشد $|V| = |E| + 1$

قضیه۳: اگر $T = (V.E)$ یک درخت باشد، $|V| \geq 3$ در این صورت حداقل دو رأس با درجه یک وجود دارد.

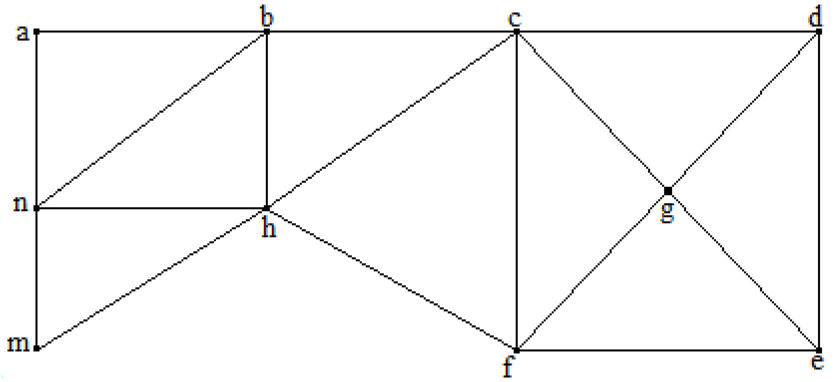
درخت پوشا

زیرگراف H از گراف $G = (V.E)$ یک درخت پوشا نامند در صورتی که:

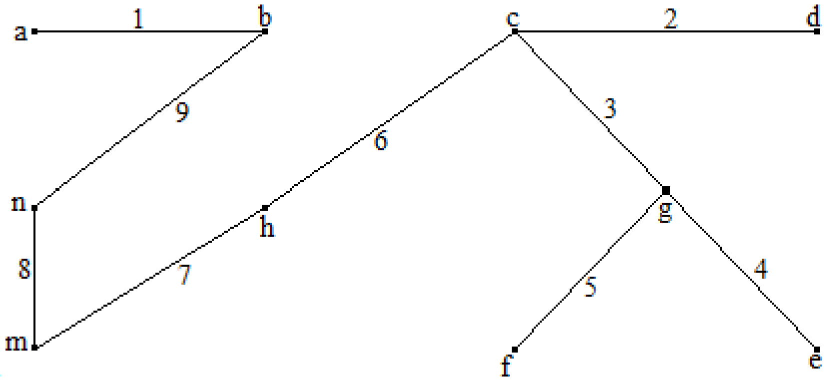
۱. H درخت باشد

۲. همه رئوس G در H باشد.

مثال) درخت پوشا گراف زیر را بیابید.



$|V| = 10$



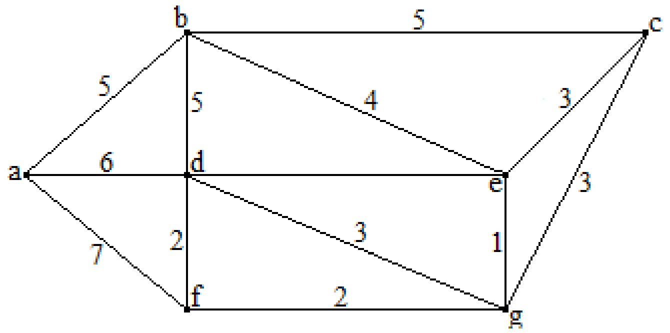
درخت پوشای مینیمم

فرض کنید که $G = (V.E)$ یک گراف وزن دار است. درخت پوشای مینیمم عبارت است از:

۱. درخت پوشا باشد

۲. $\sum_{i=1}^{m} c(e_i)$ مینیمم باشد. ($c(e_i)$ وزن یال c است)

مثال) درخت پوشای مینیمم گراف وزن دار زیر را بیابید.

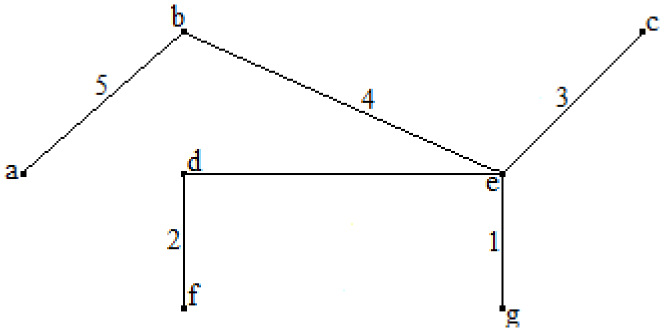


$c(\{d.f\}) = 2$

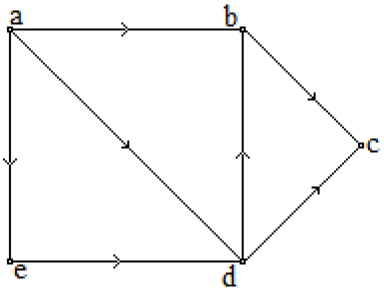
$$c(\{b.e\}) = 4$$
$$|V| = 7$$
$$|E| = 6$$

e_i	$c(e_i)$		
{a.g}	1	+	1
{d.e}	2	+	2
{d.f}	2	+	3
{f.g}	2	-	
{d.g}	3	-	
{e.c}	3	+	4
{g.c}	3	-	
{b.e}	4	+	5
{b.d}	5	-	
{b.c}	5	-	
{a.b}	5	+	6
{a.d}	6	-	
{a.f}	7	-	

$$\sum_{i=1}^{6} c(e_i) = 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 5 = 17$$



درخت ریشه دار



$\overset{-}{dega} = a$ تعداد یالهایی با انتهای

$\overset{+}{dega} = a$ تعداد یالهایی با ابتدای

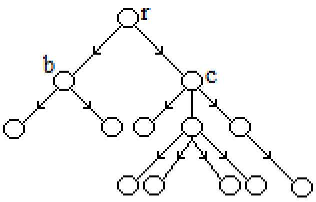
$$\overset{-}{dega} = 0 \quad \cdot \quad \overset{+}{dega} = 3$$

$$\overset{-}{degb} = 2 \quad \cdot \quad \overset{+}{degb} = 1$$

درخت سودار $G = (V; E)$ را درخت ریشه دار نامند در صورتی که رأس منحصر بفرد مانند r موجود باشد بطوری که درجه $\overset{-}{r}$

$\left(\overset{-}{degr} = 0\right)$ صفر باشد و به ازای هر رأس V $(V \neq r)$ $\left(\overset{-}{degV} = 1\right)$

مثال) گراف زیر یک درخت ریشه دار است.



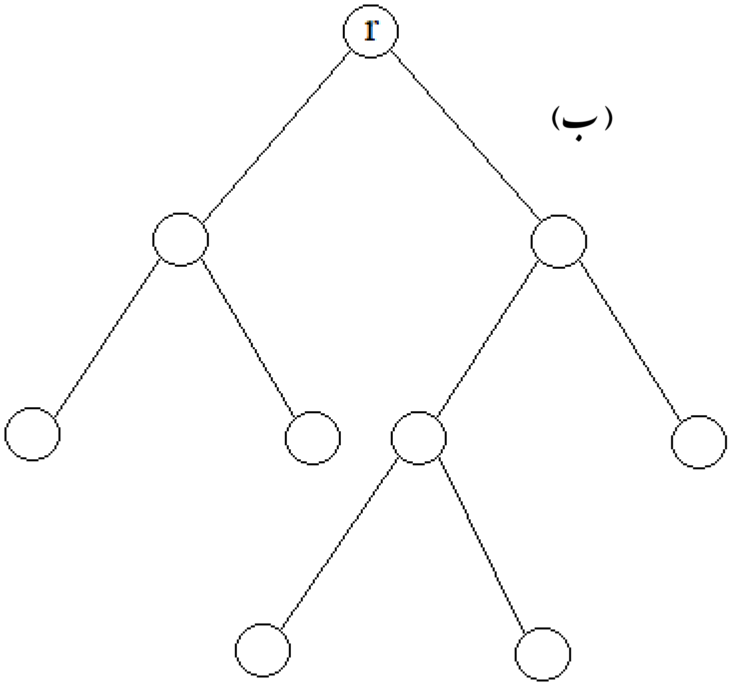
درخت ریشه دار دودوئی منظم

درخت ریشه دار را درخت دودوئی منظم نامند در صورتی که به ازای هر رأس مانند v

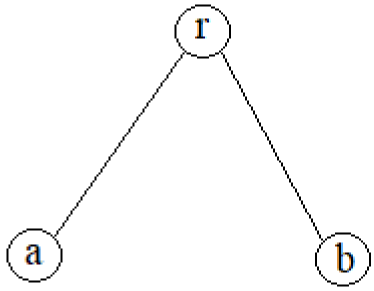
$$\overset{+}{deaV} = 0 \quad \text{یا} \quad \overset{+}{deaV} = 2$$

مثال) گراف های زیر دودوئی منظم میباشند.

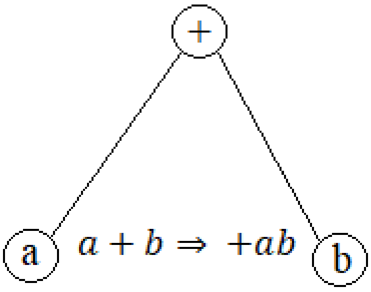
(ب)

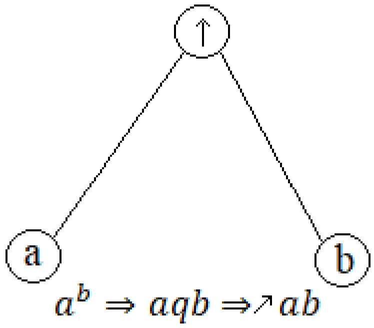


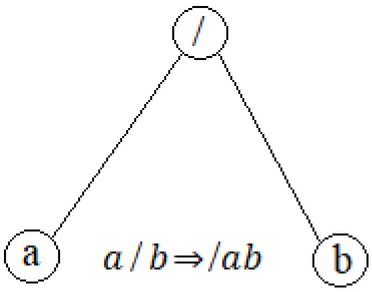
(الف)



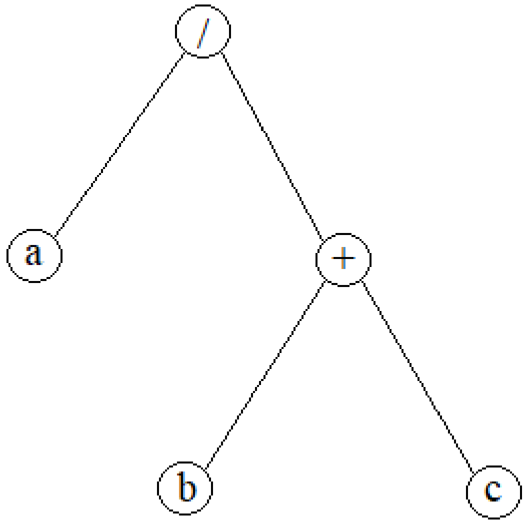
نماد لهستانی







مثال) $a/(b+c)$



لهستانی = $/a+bc => /a \propto$